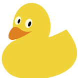
ENS de Lyon — Algèbre 1
L3 — 2024-2025

TD 4 : groupe symétrique

Les exercices marqués d'un  seront corrigés en TD, si le temps le permet.

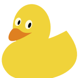
Exercices importants



Exercice 1.

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$.

Déterminer sa décomposition canonique en produit de cycles disjoints, son ordre, sa signature, une décomposition en produit de transposition ainsi que σ^{100}.



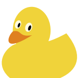
Exercice 2. (Générateurs de $\mathfrak{A}_n$)

Soit $n \geqslant 3$.

1. Rappeler pourquoi $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.
2. Démontrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les carrés d'éléments de $\mathfrak{S}_n$. Est-ce que tout élément de $\mathfrak{A}_n$ est un carré dans $\mathfrak{S}_n$?
3. Démontrer que pour $n \geqslant 5$, $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les bitranspositions.
4. Démontrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles de la forme $(1\ 2\ i)$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$.
5. En déduire que si $n \geqslant 5$ est impair, alors $\mathfrak{A}_n$ est engendré par $(1\ 2\ 3)$ et $(3\ 4\ \cdots\ n)$ et que si $n \geqslant 4$ est pair, alors $\mathfrak{A}_n$ est engendré par $(1\ 2\ 3)$ et $(1\ 2)(3\ 4\ \cdots\ n)$.

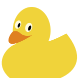
Exercice 3.

Soit $n \leqslant 5$. Démontrer que deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont même ordre et même signature. Vérifier que c'est faux si $n = 6$.



Exercice 4.

1. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que si $H \cap \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n$, alors $H = \mathfrak{A}_n$ ou $H = \mathfrak{S}_n$.
   (b) On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Montrer que H est d'ordre au plus 2 puis que H est trivial.
   (c) En déduire la liste des sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 5$.
2. Quels sont les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n = 2$, 3, et 4 ?
3. Pour quels $n \geqslant 2$ existe-t-il un morphisme de groupes surjectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n-1}$?



Exercice 5. (Théorème de Wilson)

Soit p un nombre premier.

1. Montrer qu'un élément de $\mathfrak{S}_p$ est d'ordre p si et seulement si c'est un p-cycle.
2. Soit S un p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$. Combien de p-cycles contient S ?

3. En remarquant que 2 p-Sylow distincts de $\mathfrak{S}_p$ ont toujours une intersection réduite au neutre, calculer le nombre p-Sylow dans $\mathfrak{S}_p$.
4. En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Exercice 6. (Sous-groupes d'indice n de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \geqslant 2$ et H un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$. On va démontrer que $H \cong \mathfrak{S}_{n-1}$.

1. Démontrer le résultat pour $n \leqslant 3$.
2. Soit $n = 4$.
   (a) Démontrer que H n'est pas cyclique.
   (b) Démontrer qu'il existe $\sigma, \tau \in H$ tels que $\sigma^3 = \tau^2 = \mathrm{Id}$, que H n'est pas abélien, et que $H = \{\mathrm{Id}, \tau, \sigma, \sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma\}$.
   (c) En déduire que $H \cong \mathfrak{S}_3$.
3. Soit $n \geqslant 5$. On fait agir $\mathfrak{S}_n$ par translation à gauche sur l'ensemble $X := \mathfrak{S}_n/H$.
   (a) On note $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}(X)$ le morphisme de groupes associé. Démontrer que φ est un isomorphisme.
   (b) En considérant l'action induite par le sous-groupe H sur X. Démontrer que $H \cong \varphi(H) \cong \mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 7. (Autour de $\mathfrak{S}_4$)

1. Montrer que les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, V_4, $\mathfrak{A}_4$, et $\mathfrak{S}_4$, où V_4 est le groupe des doubles transpositions (aussi appelé *Groupe de Klein*).
2. Déterminer un isomorphisme entre $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4/V_4$.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. (Autour de $\mathfrak{A}_4$)

1. Démontrer que si τ est un 3-cycle et σ est une bitransposition, alors $\langle \sigma, \tau \rangle = \mathfrak{A}_4$. En déduire que $\mathfrak{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.
2. (a) Donner la liste des classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.
   (b) Justifier qu'un sous-groupe distingué strict de $\mathfrak{A}_4$ ne contient aucun 3-cycle.
   (c) En déduire que V_4 est l'unique sous-groupe strict non-trivial et distingué de $\mathfrak{A}_4$, et une autre preuve du fait que $\mathfrak{A}_4$ n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6.

Exercice 9.

Soit G un groupe d'ordre n. On rappelle que l'action par translation à gauche de G sur lui-même induit un morphisme de groupes injectif $\rho : G \to \mathfrak{S}_n$.

1. Soit $g \in G$ d'ordre k. Montrer que $\rho(g)$ est un produit de n/k k-cycles.
2. À quelle condition a-t-on $\rho(G) \subset \mathfrak{A}_n$?
3. A quelle condition a-t-on $\rho(G) \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$?

Exercice 10. (2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$)

1. Donner le cardinal d'un 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.
2. Quels sont les nombres possibles de 2-Sylow de $\mathfrak{S}_4$.
3. Soit D_4, le groupe d'isométrie du carré de sommets 1, i, -1, et $-i$. Il est constitué des rotations d'angles 0, $\pi/2$, π, et $3\pi/2$, et des symétries par rapport aux droites $\mathbb{R}$, $i\mathbb{R}$, $(1+i)\mathbb{R}$, et $(1-i)\mathbb{R}$.
   En faisant agir D_4 sur l'ensemble $\{1, i, -1, -i\}$, montrer que l'on a un morphisme injectif $D_4 \hookrightarrow \mathfrak{S}_4$.
4. Quelle est l'image de ce morphisme ?
5. En déduire que $\mathfrak{S}_4$ possède 3 2-Sylow tous isomorphes à D_4.
6. (*Plus difficile*) Montrer que l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur ses 2-Sylow, donne un morphsime de groupes $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ de noyau V_4.

Exercice 11. (Isométries du tétraèdre)

Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier dans $\mathbb{R}^3$ centré en 0. Démontrer que l'ensemble des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent $\mathcal{T}$ est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_4$. Que dire du sous-groupe constitué uniquement des isométries positives ?

Exercice 12. (Groupe simple d'ordre 60)

On va montrer que le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$. Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. **(a)** Montrer que G admet exactement 6 5-Sylow.
   (b) En déduire un morphisme injectif $\varphi : G \to \mathfrak{S}_6$. On note H l'image de φ.
   (c) Justifier que H est inclus dans $\mathfrak{A}_6$.
2. **(a)** On fait agir H sur $\mathfrak{A}_6/H$. Justifier qu'un élément de $\mathfrak{A}_6/H$ est fixé par tous les éléments de H.
   (b) En déduire un morphisme injectif $\psi : H \to \mathfrak{S}_5$.
   (c) Conclure que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 13. (Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va chercher à montrer que les automorphismes du groupe $\mathfrak{S}_n$ sont les automorphismes intérieurs.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. On suppose que pour toute transposition $(a\ b)$, $\varphi((a\ b))$ est aussi une transposition.
   (a) Montrer qu'il existe a_1, a_2, $a_3 \in [\![1, n]\!]$ distincts tels que $\varphi((1\ 2)) = (a_1\ a_2)$ et $\varphi((1\ 3)) = (a_1\ a_3)$.
   (b) Soit $k \in [\![4, n]\!]$. Montrer qu'il existe $a_k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\varphi((1\ k)) = (a_1\ a_k)$ et justifier que l'application $\sigma : k \mapsto a_k$ est un élément de $\mathfrak{S}_n$.
   (c) Conclure que φ est l'automorphisme intérieur $(g \mapsto \sigma g \sigma^{-1})$.

Pour prouver que les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ sont intérieurs, il suffit donc de prouver qu'un automorphisme envoie toujours les transpositions sur les transpositions. Soit φ un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$.

2. Justifier que pour une transposition σ, $\varphi(\sigma)$ un produit d'un nombre impair de transpositions à supports disjoints.
3. Méthode par dénombrement : Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $Z(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_n, \tau\sigma = \sigma\tau\}$ le *centralisateur* de σ.
   (a) On note $\sigma = \prod_{k=1}^{n} \sigma_{k,1} \cdots \sigma_{k,\ell_k}$ la décomposition en cycles à supports disjoint de σ. C'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, les $(\sigma_{k,i})_{1 \leqslant i \leqslant \ell_k}$ sont des k-cycles et tous les $(\sigma_{k,i})_{k,i}$ ont leurs supports disjoints.

   Montrer que $\#Z(\sigma) = \prod_{k=1}^{n} \ell_k! k^{\ell_k}$.
   (b) Soit σ un transposition. On suppose que $\varphi(\sigma)$ est un produit de k transpositions à supports disjoints. En déduire que $\binom{n-2}{2k-2} \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3 \times 1}{k} = 1$.
   (c) En déduire que φ est intérieur sauf éventuellement si $n = 6$.
4. Méthode algébrique :
   (a) Montrer que pour une transposition σ, $Z(\sigma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_{n-2}$.
   (b) Montrer que si σ est un produit de k transpositions à supports disjoints, $Z(\sigma)$ contient un sous-groupe distingué N isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.
   (c) En déduire que si φ envoie une transposition sur un produit de k transpositions à supports disjoints, $\mathfrak{S}_{n-2}$ admet un sous-groupe distingué isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k-1}$.
   (d) En déduire que φ est intérieur sauf éventuellement si $n = 6$.